Corrigé

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln x$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.

2. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   $f(x) = x(1 - \ln x)$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$
   Par produit de limites, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 - 1\times\ln x - x\times\dfrac{1}{x} = -\ln x$.
   b. On détermine le signe de $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1$; on établit le tableau des variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On résout l'équation $f(x) = x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   $f(x) = x \iff x - x\ln x = x \iff -x\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n\ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0,5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0,5) \approx 0,85$.
  On a donc $0,5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, ce qui vaut dire que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  La fonction f est croissante sur $[0,5 ; 1]$ donc $f(0,5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$.
  Or $f(0,5) \approx 0,85 \geqslant 0,5$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 1$.
  On a donc : $0,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$, donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0; de plus elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. **a.** Des inégalités $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, on peut déduire :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante;
- $u_n \leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Pour tout n, on a $f(u_n) = u_{n+1}$. La fonction f étant continue, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc $f(\ell) = \ell$.
L'équation $f(x) = x$ a pour solution $x = 1$ donc on peut dire que $\ell = 1$.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = kx - x\ln x$.

1. On étudie les variations de la fonction f_k.

$f_k'(x) = k - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = k - 1 - \ln x$

- $f_k'(x) = 0 \iff k - 1 - \ln x = 0 \iff k - 1 = \ln x \iff \mathrm{e}^{k-1} = x$
- $f_k'(x) > 0 \iff k - 1 - \ln x > 0 \iff k - 1 > \ln x \iff \mathrm{e}^{k-1} > x$

Donc $f_k'(x) > 0$ si $x < \mathrm{e}^{k-1}$, $f_k'(x) = 0$ si $x = \mathrm{e}^{k-1}$ et $f_k'(x) < 0$ si $x > \mathrm{e}^{k-1}$.
On en déduit que la fonction f_k admet un maximum y_k atteint pour $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.

2. $x_k = \mathrm{e}^k - 1$ donc

$y_k = f_k(x_k) = kx_k - x_k \ln x_k = k\,\mathrm{e}^{k-1} - \mathrm{e}^{k-1} \ln \mathrm{e}^{k-1} = k\,\mathrm{e}^{k-1} - \mathrm{e}^{k-1}(k-1)$
$\quad = k\,\mathrm{e}^{k-1} - k\,\mathrm{e}^{k-1} + \mathrm{e}^{k-1} = \mathrm{e}^{k-1} = x_k$

Corrigé (2023 – Polynésie – Jour 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a. Démonstration par récurrence :
Initialisation : On a bien $u_0 = 2\times 0,9^0 - 3 = 2-3 = -1$: la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\times 0,9^n - 3$.
Alors par définition de la suite $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$ ou $u_{n+1} = 0,9(2\times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2\times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2\times 0,9^{n+1} - 3$.
La relation est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence :

$$u_n = 2\times 0,9^n - 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

b. On sait que $0 < 0,9 < 1$ implique que $0 < 0,9^n \leqslant 1$ puis en multipliant par $2 > 0$,
$0 < 2\times 0,9^n \leqslant 2$ et enfin en ajoutant à chaque membre le nombre -3 :
$-3 < 0,9^n - 3 \leqslant -1$, soit $-3 < u_n \leqslant -1$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - 0,3 - u_n = -0,1u_n - 0,3$.
Or l'encadrement trouvé précédemment $-3 < u_n < -1$ donne par produit par $-0,1$,
$0,1 < -0,1u_n < 0,3$ et en retranchant $0,3$, $-0,2 - 0,1u_n - 0,3 < 0$.
Conclusion : quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est donc décroissante.

d. La suite (u_n) décroissante et minorée par -3 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant -3$.
D'autre part de l'égalité $u_n = 2\times 0,9^n - 3$, sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$. La suite (u_n) converge vers -3.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifications :
- $-3 < x \leqslant -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leqslant -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leqslant 1$. Donc la fonction est définie sur $]-3\,;\,-1]$
- La fonction g est dérivable sur $]-3\,;\,-1]$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{0,5}{0,5x+1,5} - 1 = \dfrac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x+1,5} = \dfrac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$.
On a vu ci-dessus que $0,5x + 1,5 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-0,5x - 1$:
  - $g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x$;
  - $g'(x) > 0 \iff -0,5x - 1 > 0 \iff -1 > 0,5x \iff -2 > x$;
  - $g'(x) < 0 \iff -0,5x - 1 < 0 \iff -1 < 0,5x \iff -2 < x$;

Conclusion : la fonction est croissante sur $]-3\,;\,-2]$ et décroissante sur $[-2\,;\,-1]$.
- On a $\lim\limits_{x\to-3} \ln(0,5x+1,5) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = -\infty$
- $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = 0 + 1 = 1$;
- $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln\dfrac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx 1,31$.

b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-3\,;\,-2]$, la fonction g est strictement croissante de moins l'infini à $g(-2) > 0$ et est continue sur cet intervalle : il existe donc un réel unique

$\alpha \in]-3\,;\,-2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$g(-2,9) \approx -0,957$ et $g(-2,8) \approx 0,4974$, d'où $-2,9 < \alpha < -2,8$;

$g(-2,89) \approx -0,01$ et $g(-2,88) \approx 0,067$, d'où $-2,89 < \alpha < -2,88$;

$g(-2,889) \approx -0,002$ et $g(-2,888) \approx 0,006$, d'où $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. **a.** Que que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$ et en utilisant la formule du **1. a.**, $v_n = \ln(0,5(2\times 0,9^n - 3) + 1,5) = \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) = \ln 0,9^n = n\ln 0,9$.

L'égalité $v_n = n\ln 0,9$, montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,9$.

b. On a $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$.

c. On a donc $g(u_n) = 0 \iff u_n = \alpha$, soit $2\times 0,9^n - 3 = \alpha$.

Or on a vu que $-2,889 < \alpha < -2,888$: on en déduit que $-2,889 < 2\times 0,9^n - 3 < -2,888$, soit en ajoutant 3 :

$0,111 < 2\times 0,9^n < 0,112 \iff 0,0555 < 0,9^n < 0,0556$ soit par croissance du logarithme népérien $\ln 0,0555 < n\ln 0,9 < \ln 0,0556$ et enfin $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} < n < \dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} \approx 27,4$ et $\dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9} \approx 27,5$.

On aurait donc un entier n tel que $27,4 < n < 27,5$. Donc n ne peut être un naturel.

Conclusion : il n'existe pas k tel que $u_k = \alpha$.

d. On a vu que $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$. On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.